Proceedings of IAM, V.9, N.1, 2020, pp.28-45

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ BENNEY-LUKE СО СПЕКТРАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Юлдашев Т.К.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
e-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Абстракт. Рассмотрены вопросы классической разрешимости и построения решения нелокальной обратной краевой задачи для многомерного интегро-дифференциального уравнения Benney-Luke четвертого порядка с вырожденным ядром и спектральными параметрами. Вычислены значения спектральных параметров, получены необходимые и достаточные условия существования решения прямой краевой и обратной задач. Разложены в ряд Фурье решения задач, соответствующие разным множествам значений спектральных параметров. Доказана абсолютная и равномерная сходимость рядов, возможность их почленного дифференцирования по всем переменным и абсолютная и равномерная сходимость дифференцированных рядов.

Ключевые слова: Обратная задача, коэффициент переопределения, интегральные условия, спектральные параметры, классическая разрешимость.

AMS Subject Classification: 35A30, 35C15, 35G55, 35L30.

1. Введение.

Теория обратных задач возникла прежде всего при решении задач астрономии, квантовой теории рассеяния, геофизики и т.д. Раздел обратных задач охватывает решения широкого спектра задач в разных направлениях науки (см., напр. [1-3, 13]). Для нахождения решения прямых задач математической физики требуется задать коэффициенты уравнения, границу области, начальные и граничные условия. Обычно бывает, что во время решения практических задач экспериментальным путем количественные характеристики исследуемого объекта недоступны для непосредственного наблюдения или проведение самого эксперимента по тем или иным причинам невозможно. Тогда на практике исследователь может получить некоторую косвенную информацию и сделать заключение о свойствах изучаемого объекта. Данная информация определяется природой изучаемого объекта и здесь требуются математическая обработка и интерпретация результатов исследований. Часто возникают нелокальные интегральные условия, которые дают усредненную информацию об объекте [7]. В условиях, когда структура математической модели исследуемого процесса известна, ставится проблема переопределения математической модели. Такие задачи относятся к классу обратных задач математической физики.

Бывает так, что изучаются обратные задачи, в которых все неизвестные коэффициенты зависят только от временной переменной и не зависят от пространственных переменных. Бывает и наоборот, что искомые характеристики не меняются со временем, но зависят только от пространственных переменных. В теории обратных задач часто рассматриваются дифференциальные уравнения параболического типа (см., напр. [4, 9-12, 14]). В работе [5] изучена обратная задача для уравнения Бюргерса. В работе [8] рассматривается задача определения правой части волнового уравнения с нелокальным условием. Здесь задача сводится к задаче минимизации некоторого функционала, построенного с помощью дополнительной информации. В работе [6] рассматривается задача определения параметров дискретных динамических систем. Здесь составляется квадратичный функционал и находится его градиент. Предлагается вычислительный алгоритм для решения рассмотренной обратной задачи.

В одномерном случае линеаризованные дифференциальные уравнения Benney-Luke с начальными условиями по времени и граничным условием Бенара по пространственному переменному описывают двустороннее распространение длинных волн на мелкой воде с учетом поверхностного натяжения [17]. В настоящей работе изучаются вопросы разрешимости и построения решения нелокальной обратной задачи для многомерного интегро-дифференциального уравнения типа Benney-Luke четвертого порядка с вырожденным ядром и спектральными параметрами. Обобщаются и развиваются методики работ [15, 16]. Здесь отметим, что обратные задачи для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений со спектральными параметрами изучены совсем мало. Итак, в области $\Omega=\{(t,x)|\ 0<t<T,\ 0<x<l\}$ рассматривается уравнение вида

$$U_{tt}-\sum_{i=1}^{m}U_{ttx_i x_i}-\omega^2\sum_{i=1}^{m}U_{x_i x_i}+\omega^2\sum_{i=1}^{m}U_{x_i x_i x_i x_i}=$$
$$=\nu\int_0^T K(t,s)U(s,x)\,ds+\alpha(t)\beta(x), \tag{1}$$

где T и $l-$ заданные положительные действительные числа, $\omega-$ положительный спектральный параметр, $\nu-$ действительный отличный от нуля спектральный параметр, $x\in R^m$, $0\neq\alpha(t)\in C[0;T]$, $\beta(x)-$ многомерная функция переопределения, $0\neq K(t,s)=\sum_{i=1}^{k}a_i(t)b_i(s)$, $a_i(t),b_i(s)\in C[0;T]$. Здесь предполагается, что система функций

$a_i(t),\ i=\overline{1,k}$ и система функций $b_i(s),\ i=\overline{1,k}$ являются линейно независимыми.

Задача. *Найти в многомерной области* Ω *пару функций*

$$\left\{U(t,x)\in C(\bar{\Omega})\cap C^1\left(\Omega'\right)\cap C_{t,x}^{2,4}(\Omega),\ \beta(x)\in C\{0\le x\le l\}\right\},$$

удовлетворяющую уравнению (1) *и следующим условиям*

$$U(0,x)=U(T,x),\ \ 0\le x\le l, \tag{2}$$

$$\int_0^T U(t,x)\,dt=\varphi(x),\ \ 0\le x\le l, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}U(t,0,\ x_2,x_3,...,x_m)=U(t,l,\ x_2,x_3,...,x_m)=\\ =U(t,x_1,0,\ x_3,...,x_m)=U(t,x_1,l,\ x_3,...,x_m)=\ \dots\ =\\ =U(t,x_1,\ \dots\ ,x_{m-1},0)=U(t,x_1,\ \dots\ ,x_{m-1},l)=\\ =U_{x_1x_1}(t,0,\ x_2,x_3,...,x_m)=U_{x_1x_1}(t,l,\ x_2,x_3,...,x_m)=\\ =U_{x_1x_1}(t,x_1,0,\ x_3,...,x_m)=U_{x_1x_1}(t,x_1,l,\ x_3,...,x_m)=\ \dots\ =\\ =U_{x_1x_1}(t,x_1,\ \dots\ ,x_{m-1},0)=U_{x_1x_1}(t,x_1,\ \dots\ ,x_{m-1},l)=\ \dots\ =\\ =U_{x_mx_m}(t,0,\ x_2,x_3,...,x_m)=U_{x_mx_m}(t,l,\ x_2,x_3,...,x_m)=\\ =U_{x_mx_m}(t,x_1,0,\ x_3,...,x_m)=U_{x_mx_m}(t,x_1,l,\ x_3,...,x_m)=\ \dots\ =\\ =U_{x_mx_m}(t,x_1,\ \dots\ ,x_{m-1},0)=U_{x_mx_m}(t,x_1,\ \dots\ ,x_{m-1},l)=0,\ \ 0\le t\le T,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\int_0^T \Theta(t)U(t,x)\,dt=\psi(x),\ \ 0\le x\le l, \tag{5}$$

где $0\ne\Theta(t)\in C[0;T]$, $\psi(x),\varphi(x)-$ *заданные достаточно гладкие многомерные функции в области* $\Omega_l^m=[0;l]^m$, $\Omega'=\{(t,x)|\ 0<t<T,\ 0\le x\le l\}$, $\overline{\Omega}=\{(t,x)|\ 0\le t\le T,\ 0\le x\le l\}$.

Множество значений спектральных параметров $\omega\in(0;\infty)$ и $\nu\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ разделяются на регулярные и различные иррегулярные подмножества. Для множества регулярных значений получается достаточные условия существования единственного классического решения, которое разлагается в ряд Фурье, доказываются: однозначная разрешимость обратной задачи, устойчивость решения $U(t,x)$ интегро-дифференциального уравнения (1) по функции переопределения $\beta(x)$ и по заданной функции $\varphi(x)$.

2. Формальное разложение решения в ряд Фурье.

Решение уравнения (1) в области Ω разыскивается в виде следующего ряда Фурье

$$U(t,x)=\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty} u_{n_1,\dots,n_m}(t)\,\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x), \tag{6}$$

где

$$u_{n_1,\dots,n_m}(t)=\int_{\Omega_l^m} U(t,x)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\,dx, \qquad n_1,\dots,n_m=1,2,\dots, \tag{7}$$

$$\int_{\Omega_l^m} U(t,x)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\,dx=\int_0^l\dots\int_0^l U(t,x)\,\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\,dx_1\cdot\ldots\cdot dx_m,$$

$$\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)=\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \sin\frac{\pi n_1}{l}x_1\cdot\ldots\cdot\sin\frac{\pi n_m}{l}x_m.$$

Предполагается, что и функция $\beta(x)$ разлагается в ряд Фурье

$$\beta(x)=\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\beta_{n_1,\dots,n_m}\,\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x), \tag{8}$$

где

$$\beta_{n_1,\dots,n_m}=\int_{\Omega_l^m}\beta(x)\vartheta_{n_1,\dots,n_m}(x)\,dx. \tag{9}$$

Подставляя ряды (6) и (8) в уравнение (1), получаем

$$u''_{n_1,\dots,n_m}(t)+\mu^2_{n_1,\dots,n_m}\omega^2 u_{n_1,\dots,n_m}(t)=$$

$$=\frac{\nu}{1+\mu^2_{n_1,\dots,n_m}}\int_0^T\sum_{i=1}^k a_i(t)b_i(s)\,u_{n_1,\dots,n_m}(s)\,ds+\frac{1}{1+\mu^2_{n_1,\dots,n_m}}\alpha(t)\beta_{n_1,\dots,n_m}, \tag{10}$$

где $\mu_{n_1,\dots,n_m}=\frac{\pi}{l}\sqrt{n_1^2+\ldots+n_m^2}$.

С помощью обозначения

$$\tau_{i,n_1,\dots,n_m}=\int_0^T b_i(s)u_{n_1,\dots,n_m}(s)\,ds \tag{11}$$

уравнение (10) перепишется в следующем виде

$$u''_{n_1,\dots,n_m}(t)+\mu^2_{n_1,\dots,n_m}\omega^2 u_{n_1,\dots,n_m}(t)=$$

$$=\frac{\nu}{1+\mu^2_{n_1,\dots,n_m}}\sum_{i=1}^k a_i(t)\tau_{i,n_1,\dots,n_m}+\frac{1}{1+\mu^2_{n_1,\dots,n_m}}\alpha(t)\beta_{n_1,\dots,n_m}. \tag{12}$$

Дифференциальное уравнение (12) решается методом вариации произвольных постоянных

$$u_{n_1,\dots,n_m}(t)=c_{n_1,\dots,n_m}\cos\mu_{n_1,\dots,n_m}\omega t+d_{n_1,\dots,n_m}\sin\mu_{n_1,\dots,n_m}\omega t+$$

$$+\eta_{n_1,\dots,n_m}(t\,\omega), \tag{13}$$

где

$$\eta_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\frac{\nu}{\bar{\mu}_{n_1,\ldots,n_m}\omega}\sum_{i=1}^{k}\tau_{i,n_1,\ldots,n_m}\int_0^t \sin\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega(t-s)a_i(s)\,ds+$$

$$+\frac{\beta_{n,m}}{\bar{\mu}_{n_1,\ldots,n_m}\omega}\int_0^t \sin\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega(t-s)\alpha(s)\,ds,$$

$$\bar{\mu}_{n_1,\ldots,n_m}=\mu_{n_1,\ldots,n_m}(1+\mu^2_{n_1,\ldots,n_m}).$$

Условие (2) с учетом формулы (7) принимает следующий вид

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(0)=\int_{\Omega_l^m}U(0,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx=$$

$$=\int_{\Omega_l^m}U(T,x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx=u_{n_1,\ldots,n_m}(T). \tag{14}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $c_{n_1,\ldots,n_m}$ и $d_{n_1,\ldots,n_m}$ в (13), используя условию (14), получаем

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t)=\xi_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)+$$

$$+d_{n_1,\ldots,n_m}\left(\sin\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega t+\frac{\sin\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega T}{1-\cos\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega T}\cdot\cos\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega t\right), \tag{15}$$

где

$$\xi_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\frac{\eta_{n_1,\ldots,n_m}(T,\omega)}{1-\cos\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega T}\cos\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega t+\eta_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega).$$

Теперь воспользуемся интегральным условием (3) и формулой (7)

$$\int_0^T u_{n_1,\ldots,n_m}(t)\,dt=\int_{\Omega_l^m}\int_0^T U(t,x)\,dt\,\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx=$$

$$=\int_{\Omega_l^m}\varphi(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx=\varphi_{n_1,\ldots,n_m}. \tag{16}$$

Тогда из (15) и (16) получаем

$$\varphi_{n_1,\ldots,n_m}=\int_0^T u_{n_1,\ldots,n_m}(t)\,dt=\gamma_{n_1,\ldots,n_m}(\omega)+$$

$$+d_{n_1,\ldots,n_m}\left(-\frac{\cos\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega t}{\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega}+\frac{\sin\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega T}{1-\cos\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega T}\cdot\frac{\sin\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega t}{\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega}\right)_0^T=$$

$$=\frac{d_{n_1,\dots,n_m}}{\mu_{n_1,\dots,n_m}\omega}\left[1-\cos\mu_{n_1,\dots,n_m}\omega T+\frac{\sin^2\mu_{n_1,\dots,n_m}\omega T}{1-\cos\mu_{n_1,\dots,n_m}\omega T}\right]+\gamma_{n_1,\dots,n_m}(\omega), \quad (17)$$

где $\gamma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)=\int\limits_0^T \xi_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega)\,dt.$

Итак, для определения неизвестных коэффициентов $d_{n_1,\dots,n_m}$ требуем выполнение следующего условия

$$\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)=1-\cos\mu_{n_1,\dots,n_m}\omega T\neq 0. \quad (18)$$

Тогда из (17) находим

$$d_{n_1,\dots,n_m}=\frac{\mu_{n_1,\dots,n_m}\omega}{2}\cdot(\varphi_{n_1,\dots,n_m}-\gamma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)). \quad (19)$$

Подставляя (19) в формулу (15), получим

$$u_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega)=\varphi_{n_1,\dots,n_m}B_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega)+$$

$$+\nu\sum_{i=1}^{k}\tau_{i,n_1,\dots,n_m}D_{i,n_1,\dots,n_m}(t,\omega)+\beta_{n_1,\dots,n_m}E_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega), \quad (20)$$

где

$$B_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega)=\frac{\mu_{n_1,\dots,n_m}\omega}{2}\cdot\delta_{0,n_1,\dots,n_m}(t,\omega),$$

$$\delta_{0,n_1,\dots,n_m}(t,\omega)=\sin\mu_{n_1,\dots,n_m}\omega t+\frac{\sin\mu_{n_1,\dots,n_m}\omega T}{\sigma_{n_1,\dots,n_m}(\omega)}\cdot\cos\mu_{n_1,\dots,n_m}\omega t,$$

$$D_{i,n_1,\dots,n_m}(t,\omega)=h_{i,n_1,\dots,n_m}(T,\omega)\delta_{2,n_1,\dots,n_m}(t,\omega)+h_{i,n_1,\dots,n_m}(t,\omega)-$$

$$-B_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega)\int\limits_0^T h_{i,n_1,\dots,n_m}(t,\omega)\,dt,$$

$$E_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega)=\delta_{1,n_1,\dots,n_m}(T,\omega)\delta_{2,n_1,\dots,n_m}(t,\omega)+\delta_{1,n_1,\dots,n_m}(t,\omega)-$$

$$-B_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega)\int\limits_0^T \delta_{1,n_1,\dots,n_m}(t,\omega)\,dt,$$

$$h_{i,n_1,\dots,n_m}(t,\omega)=\frac{1}{\bar{\mu}_{n_1,\dots,n_m}\omega}\int\limits_0^t \sin\mu_{n_1,\dots,n_m}\omega(t-s)a_i(s)\,ds,\ \ i=\overline{1,k},$$

$$\delta_{1,n_1,\dots,n_m}(t,\omega)=\frac{1}{\bar{\mu}_{n_1,\dots,n_m}\omega}\int\limits_0^t \sin\mu_{n_1,\dots,n_m}\omega(t-s)\alpha(s)\,ds,$$

$$\delta_{2,n_1,...,n_m}(t,\omega)=\frac{1}{\sigma_{n_1,...,n_m}(\omega)}\left[\cos\mu_{n_1,...,n_m}\omega t-\frac{\delta_{0,n_1,...,n_m}(t,\omega)}{2}\sin\mu_{n_1,...,n_m}\omega T\right].$$

Подставляя (20) в (11), получаем систему из счетных систем алгебраических уравнений (СССАУ)

$$\tau_{i,n_1,...,n_m}-\nu\sum_{j=1}^{k}\tau_{j,n_1,...,n_m}H_{i,j,n_1,...,n_m}(\omega)=\Psi_{i,n_1,...,n_m}(\omega), \qquad (21)$$

где

$$H_{i,j,n_1,...,n_m}(\omega)=\int_0^T b_i(s)D_{j,n_1,...,n_m}(s,\omega)\,ds,$$

$$\Psi_{i,n_1,...,n_m}(\omega)=\int_0^T b_i(s)\left[\varphi_{n_1,...,n_m}B_{n_1,...,n_m}(s,\omega)+\beta_{n_1,...,n_m}E_{n_1,...,n_m}(s,\omega)\right]ds. \qquad (22)$$

Отметим, что из линейной независимости системы функций $a_i(t),\ i=\overline{1,k}$ и системы функций $b_i(s),\ i=\overline{1,k}$ следует, что $H_{i,j,n_1,...,n_m}(\omega)\neq 0$. СССАУ (21) однозначно разрешима, если выполняется следующее условие

$$\Delta_{n_1,...,n_m}(\nu,\omega)=\begin{vmatrix}1-\nu H_{11} & -\nu H_{12} & ... & -\nu H_{1k}\\ -\nu H_{21} & 1-\nu H_{22} & ... & -\nu H_{2k}\\ ... & ... & ... & ...\\ -\nu H_{k1} & -\nu H_{k2} & ... & 1-\nu H_{kk}\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (23)$$

Если это условие выполняется, то система (21) имеет единственное решение при любой конечной ненулевой правой части. Поэтому при выполнении условие (23) устанавливается однозначная разрешимость поставленной нелокальной обратной задачи.

Тогда решения СССАУ (21) записываются в виде

$$\tau_{i,n_1,...,n_m}(\omega)=\frac{\Delta_{i,n_1,...,n_m}(\nu,\omega)}{\Delta_{n_1,...,n_m}(\nu,\omega)},\quad i=\overline{1,k}, \qquad (24)$$

где

$$\Delta_{i,n_1,...,n_m}(\nu,\omega)=\begin{vmatrix}1-\nu H_{11} & ... & -\nu H_{1(i-1)} & \Psi_1 & -\nu H_{1(i+1)} & ... & -\nu H_{1k}\\ -\nu H_{21} & ... & -\nu H_{2(i-1)} & \Psi_2 & -\nu H_{2(i+1)} & ... & -\nu H_{2k}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ -\nu H_{k1} & ... & -\nu H_{k(i-1)} & \Psi_k & -\nu H_{k(i+1)} & ... & 1-\nu H_{kk}\end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей $\Delta_{i,n_1,...,n_m}(\nu,\omega)$ находятся $\Psi_{i,n_1,...,n_m}(\omega)$. В свою очередь, в составе функций $\Psi_{i,n_1,...,n_m}(\omega)$ находятся неизвестные величины $\beta_{n_1,\ldots,n_m}$. В самом деле, эти неизвестные функции находились в правой части СССАУ (21). Чтобы вывести их из знака определителей выражение в (22) запишем в следующем виде

$$\Psi_{i,n_1,\ldots,n_m}(\omega)=\varphi_{n_1,\ldots,n_m}\Psi_{1,n_1,\ldots,n_m}(\omega)+\beta_{n_1,\ldots,n_m}\Psi_{2,i,n_1,\ldots,n_m}(\omega),$$

где

$$\Psi_{1,i,n_1,\ldots,n_m}(\omega)=\int\limits_0^T b_i(s)B_{n_1,\ldots,n_m}(s,\omega)\,ds,$$

$$\Psi_{2,i,n_1,\ldots,n_m}(\omega)=\int\limits_0^T b_i(s)E_{n_1,\ldots,n_m}(s,\omega)\,ds.$$

В этом случае, согласно свойству определителя имеем

$$\Delta_{i,n_1,\ldots,n_m}(\nu,\omega)=\varphi_{n_1,\ldots,n_m}\Delta_{1,i,n_1,\ldots,n_m}(\nu,\omega)+\beta_{n_1,\ldots,n_m}\Delta_{2,i,n_1,\ldots,n_m}(\nu,\omega),$$

где

$$\Delta_{j,i,n_1,\ldots,n_m}(\nu,\omega)=\begin{vmatrix} 1-\nu H_{11} & \ldots & -\nu H_{1(i-1)} & \Psi_{j1} & -\nu H_{1(i+1)} & \ldots & -\nu H_{1k} \\ -\nu H_{21} & \ldots & -\nu H_{2(i-1)} & \Psi_{j2} & -\nu H_{2(i+1)} & \ldots & -\nu H_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\nu H_{k1} & \ldots & -\nu H_{k(i-1)} & \Psi_{jk} & -\nu H_{k(i+1)} & \ldots & 1-\nu H_{kk} \end{vmatrix},$$

$j=1,2$.

Тогда формула (24) записывается в виде

$$\tau_{i,n_1,\ldots,n_m}(\omega)=\varphi_{n_1,\ldots,n_m}\frac{\Delta_{1,i,n_1,\ldots,n_m}(\nu,\omega)}{\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu,\omega)}+\beta_{n_1,\ldots,n_m}\frac{\Delta_{2,i,n_1,\ldots,n_m}(\nu,\omega)}{\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu,\omega)}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (20), получаем

$$u_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=\varphi_{n_1,\ldots,n_m}F_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)+\beta_{n_1,\ldots,n_m}M_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega), \quad (26)$$

где

$$F_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=B_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)+\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{1,i,n_1,\ldots,n_m}(\nu,\omega)}{\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu,\omega)}D_{i,n_1,\ldots,n_m}(t,\omega),$$

$$M_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)=E_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)+\nu\sum_{i=1}^{k}\frac{\Delta_{2,i,n_1,\ldots,n_m}(\nu,\omega)}{\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu,\omega)}D_{i,n_1,\ldots,n_m}(t,\omega).$$

Теперь (26) подставляем в ряд Фурье (6)

$$U(t,x,\omega)=\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\times$$

$$\times\left[\varphi_{n_1,\ldots,n_m}F_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)+\beta_{n_1,\ldots,n_m}M_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)\right]. \quad (27)$$

3. Регулярный случай.

Рассмотрим случай, когда нарушается условие (18). Пусть $\sigma_{n_1,\ldots,n_m}(\omega)=1-\cos\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega T=0$ при некоторых ω. Это условие эквивалентно уравнению относительно ω

$$\cos\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega T=1, \tag{28}$$

где $\mu_{n_1,\ldots,n_m}=\frac{\pi}{l}\sqrt{n_1^2+\ldots+n_m^2}$. Уравнение (28) имеет положительные решения:

$$\omega_k=\frac{2\pi k}{\mu_{n_1,\ldots,n_m}T},\ k\in N,$$

где $N-$ множество натуральных чисел. Множество значений $0<\omega_k$, определенных этой формулой назовём иррегулярными значениями параметра ω_k и обозначим через $\Im_1$. Множество других значений ω_k, для которых условие (18) выполняется, назовём регулярными и обозначим через $\Lambda_1=(0,\infty)\setminus\Im_1$.

Определитель $\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu,\omega)$ в (23) есть многочлен относительно ν степени не выше k. Уравнение $\Delta_{n_1,\ldots,n_m}(\nu,\omega)=0$ имеет не более k различных корней. Эти корни являются характеристическими числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1). Множество таких чисел обозначим через $\Im_2$. Другие значения ν назовём регулярными и их множество обозначим через $\Lambda_2=\left[(-\infty,0)\cup(0,\infty)\right]\setminus\Im_2$. Для $\nu\in\Lambda_2$ условие (23) выполняется. Примем обозначение $\aleph_1=\left\{(\omega,\nu):\omega\in\Lambda_1,\ \nu\in\Lambda_2\right\}$. Для регулярных значений $(\omega,\nu)\in\aleph_1$ имеет место разложение в ряд Фурье (27). Поэтому в данном случае решение прямой краевой задачи в области Ω при фиксированных значениях $\beta_{n_1,\ldots,n_m}$ представляется в виде ряда (27).

Покажем, что при определенных условиях относительно функций $\varphi(x)$ и $\beta(x)$ ряд (27) сходится абсолютно и равномерно. При любых $n_1,\ldots,n_m$ и регулярных $(\omega,\nu)\in\aleph_1$ из (26) справедливы оценки

$$\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left|u_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)\right|\le C_1\left[\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left|\varphi_{n_1,\ldots,n_m}\right|+\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left|\beta_{n_1,\ldots,n_m}\right|\right], \tag{29}$$

$$\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left|u''_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)\right|\le C_1\left[\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left|\varphi_{n_1,\ldots,n_m}\right|+\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty}\left|\beta_{n_1,\ldots,n_m}\right|\right], \tag{30}$$

где $0<C_1=\max\{C_{11};C_{12}\}$,

$$C_{11}=\max_{n_1,\ldots,n_m}\left\{\max_{t\in[0,T]}\left|F_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)\right|;\ \max_{t\in[0,T]}\left|M_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)\right|\right\}<\infty,$$

$$C_{12}=\max_{n_1,\ldots,n_m}\left\{\max_{t\in[0,T]}\left|F''_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)\right|;\ \max_{t\in[0,T]}\left|M''_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)\right|\right\}<\infty.$$

Условия А. Пусть многомерные функции $\varphi(x)\in C^4(\Omega_l)$, $\beta(x,y)\in C^4(\Omega_l)$ в многомерной области Ω_l имеет кусочно-непрерывные производные до пятого порядка.

Тогда путем интегрирования по частям пять раз по переменной x_1 интеграл

$$\varphi_{n_1,\ldots,n_m}=\int_{\Omega_l^m}\varphi(x)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx$$

получаем, что

$$\varphi_{n_1,\ldots,n_m}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^5\frac{\varphi^{(5)}_{n_1,\ldots,n_m}}{n_1^5}, \tag{31}$$

где

$$\varphi^{(5)}_{n_1,\ldots,n_m}=\int_{\Omega_l^m}\frac{\partial^5\varphi(x)}{\partial x_1^5}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx. \tag{32}$$

Путем интегрирования по частям пять раз по переменной x_2 интеграл (32) получаем, что

$$\varphi^{(5)}_{n_1,\ldots,n_m}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^5\frac{\varphi^{(10)}_{n_1,\ldots,n_m}}{n_2^5}, \tag{33}$$

где

$$\varphi^{(10)}_{n_1,\ldots,n_m}=\int_{\Omega_l^m}\frac{\partial^{10}\varphi(x)}{\partial x_1^5\,\partial x_2^5}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\varphi^{(5m-5)}_{n_1,\ldots,n_m}=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^5\frac{\varphi^{(5m)}_{n_1,\ldots,n_m}}{n_m^5}, \tag{34}$$

где

$$\varphi^{(5m)}_{n_1,\ldots,n_m}=\int_{\Omega_l^m}\frac{\partial^{5m}\varphi(x)}{\partial x_1^5\,\partial x_2^5\ldots\partial x_m^5}\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx.$$

Здесь справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n_1,\dots,n_m}^{(5m)}\right]^2 \le \left(\frac{2}{l}\right)^m \int_{\Omega_l^m}\left[\frac{\partial^{5m}\varphi(x)}{\partial x_1^5\,\partial x_2^5\dots\partial x_m^5}\right]^2 dx. \tag{35}$$

Из (31), (32) и (34) следует, что

$$\varphi_{n_1,\dots,n_m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m}\frac{\varphi_{n_1,\dots,n_m}^{(5m)}}{n_1^5\dots n_m^5}. \tag{36}$$

Подобными свойствами вида (31)-(36) обладает и функция $\beta(x,y)\in C^4(\Omega_l)$.

Учитывая формулу (29) и свойства функций $\varphi(x,y),\ \beta(x,y)\in C^4(\Omega_l)$ и применяя неравенство Коши-Буняковского, для ряда (27) получим

$$\left|U(t,x,\omega)\right| \le \sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\left|u_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega)\right|\cdot\left|\vartheta(x)\right| \le$$

$$\le \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m C_1\left(\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\left|\varphi_{n_1,\dots,n_m}\right| + \sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\left|\beta_{n_1,\dots,n_m}\right|\right) \le$$

$$\le \gamma_1\left(\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^5\dots n_m^5}\left|\varphi_{n_1,\dots,n_m}^{(5m)}\right| + \sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^5\dots n_m^5}\left|\beta_{n_1,\dots,n_m}^{(5m)}\right|\right) \le$$

$$\le \gamma_1\left[\sqrt{\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^{10}\dots n_m^{10}}}\sqrt{\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\left[\varphi_{n_1,\dots,n_m}^{(5m)}\right]^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^{10}\dots n_m^{10}}}\sqrt{\sum_{n,m=1}^{\infty}\left[\beta_{n_1,\dots,n_m}^{(5m)}\right]^2}\right] \le$$

$$\le \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \gamma_1\sqrt{\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\frac{1}{n_1^{10}\dots n_m^{10}}}\left[\sqrt{\int_{\Omega_l^m}\left[\frac{\partial^{5m}\varphi(x)}{\partial x_1^5\,\partial x_2^5\dots\partial x_m^5}\right]^2 dx} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\int_{\Omega_l^m}\left[\frac{\partial^{5m}\beta(x)}{\partial x_1^5\,\partial x_2^5\dots\partial x_m^5}\right]^2 dx}\right] < \infty, \tag{37}$$

где $\gamma_1 = \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m C_1\left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m}$.

Из (37) следует, что ряд (27) абсолютно и равномерно сходится в области $\overline{\Omega}$. С помощью оценок (29), (30) и условий А для функции (27) не трудно показать непрерывность всех производных, входящих в уравнение (1).

Для установления единственности решения покажем, что при однородном интегральном условии $\int\limits_0^T U(t,x,\omega)\,dt = 0,\ 0 \le x \le l$ и нулевой правой части краевая задача (1)-(4) имеет только тривиальное решение. Предположим, что $\varphi(x) \equiv 0,\ \beta(x) \equiv 0$. Тогда $\varphi_{n_1,\ldots,n_m} = 0,\ \beta_{n_1,\ldots,n_m} = 0$ и из формулы (6) и (26) следует, что

$$\int\limits_{\Omega_l^m} U(t,x,\omega)\vartheta_{n_1,\ldots,n_m}(x)\,dx = 0.$$

Отсюда в силу полноты систем собственных функций $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n_1}{l}x_1\right\}$, $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n_2}{l}x_2\right\}, \ldots,$ $\left\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n_m}{l}x_m\right\}$ в $L_2\left(\Omega_l^m\right)$ заключаем, что $U(t,x,\omega) \equiv 0$ для всех $x \in \Omega_l^m = [0,l]^m$ и $t \in [0,T]$.

Следовательно, если выполняются условия (18) и (23), то для прямой задачи (1)-(4) существует решение и это решение единственно в области Ω.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия А. Тогда прямая задача* (1)-(4) *при фиксированных значениях* $\beta_{n_1,\ldots,n_m}$ *однозначно разрешима в области* Ω *при всевозможных* $n_1, \ldots, n_m$ *и* $(\omega,\nu) \in \aleph_1$. *Это решение определяется рядом* (27). *При этом возможно почленное дифференцирование ряда* (27) *по всем переменным и полученные ряды будут сходиться абсолютно и равномерно.*

4. Определение коэффициента в обратной задаче.

Теперь определим неизвестный коэффициент $\beta(x)$. С этой целью воспользуемся условием (5). Тогда из (26) получаем

$$\psi_{n_1,\ldots,n_m} = \int\limits_{\Omega_l} \psi(x,y)\vartheta(x)\,dx = \int\limits_{\Omega_l}\int\limits_0^T \Theta(t)U(t,x,y,\omega)\,dt\,\vartheta(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^T \Theta(t)u_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)\,dt = \varphi_{n_1,\ldots,n_m}\chi_{1,n_1,\ldots,n_m}(\omega) + \beta_{n_1,\ldots,n_m}\chi_{2,n_1,\ldots,n_m}(\omega),$$

где

$$\chi_{1,n_1,\ldots,n_m}(\omega) = \int\limits_0^T \Theta(t)F_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)\,dt, \quad \chi_{2,n_1,\ldots,n_m}(\omega) = \int\limits_0^T \Theta(t)M_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)\,dt.$$

Отсюда определяем, что

$$\beta_{n_1,\ldots,n_m} = \frac{\psi_{n_1,\ldots,n_m} - \varphi_{n_1,\ldots,n_m}\,\chi_{1,n_1,\ldots,n_m}(\omega)}{\chi_{2,n_1,\ldots,n_m}(\omega)}\,. \tag{38}$$

Проверяем условие, что в (38) $\chi_{2,n_1,\ldots,n_m}(\omega) \neq 0$. Предположим

$$\chi_{2,n_1,\ldots,n_m}(\omega) = \int\limits_0^T \Theta(t)\, M_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)\, dt = 0. \tag{39}$$

Применяем теорему о среднем. По условию постановки задачи $\Theta(t) \neq 0,\ t \in [0, T]$. Тогда из (39) получим, что $\int\limits_0^T M_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)\, dt = 0.$ Анализ функций $M_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)$ показывает, что это возможно, если справедливы следующие равенства

$$\int\limits_0^T \sin\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega(T-t)\, a_i(t)\, dt = 0\,,\quad \int\limits_0^T \sin\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega(T-t)\,\alpha(t)\, dt = 0. \tag{40}$$

Применяем теорему о среднем к равенству (40). По условию постановки задачи $a_i(t) \neq 0,\ \alpha(t) \neq 0,\ t \in [0, T]$. Тогда из (40) получаем, что $\int\limits_0^T \sin\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega(T-t)\, dt = 0.$ Вычисляя этот интеграл, приходим к тригонометрическому уравнению $\cos\mu_{n_1,\ldots,n_m}\omega T = \mu^{-1}_{n_1,\ldots,n_m}$, $\mu_{n_1,\ldots,n_m} = \frac{\pi}{l}\sqrt{n_1^2 + \ldots + n_m^2}$.

Множество положительных возрастающих решений ω_k этого уравнения обозначим через $\Im_3$. Так как $\Im_3 \subset \Lambda_1$, то рассмотрим $\omega_k \in \Lambda_3 = \Lambda_1 \setminus \Im_3$. Для всех $\omega_k \in \Lambda_3$ выполняется условие $\chi_{2,n_1,\ldots,n_m}(\omega) \neq 0$.

Через $\aleph_2$ обозначим множество $\aleph_2 = \{(\omega, \nu) : \omega \in \Lambda_3,\ \nu \in \Lambda_2\}$. В силу достаточной гладкости функций $\psi(x)$, $\varphi(x)$, покажем, что следующий ряд сходится абсолютно и равномерно

$$\beta(x) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{\psi_{n_1,\ldots,n_m} - \varphi_{n_1,\ldots,n_m}\,\chi_{1,n_1,\ldots,n_m}(\omega)}{\chi_{2,n_1,\ldots,n_m}(\omega)}\,\vartheta(x)\,. \tag{41}$$

Условия Б. Пусть многомерная функция $\psi(x) \in C^4(\Omega_l)$ в области Ω_l имеет кусочно-непрерывные производные до пятого порядка.

Учитывая свойства этой функции и применяя неравенство Коши-Буняковского, для ряда (41) получим

$$\left|\beta(x)\right| \le \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left|\chi_{2,n_1,\ldots,n_m}(\omega)\right|^{-1} \times$$
$$\times\left[\left|\psi_{n_1,\ldots,n_m}\right| + \left|\varphi_{n_1,\ldots,n_m}\right| \cdot \left|\chi_{1,n_1,\ldots,n_m}(\omega)\right|\right] \le$$
$$\le \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left(\left|\psi_{n_1,\ldots,n_m}\right| + C_1\left|\varphi_{n_1,\ldots,n_m}\right| \cdot \int_0^T \left|\Theta(t)\right| dt\right) \cdot \left(C_1 \int_0^T \left|\Theta(t)\right| dt\right)^{-1} \le$$
$$\le \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \frac{1}{C_0} \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left(\left|\psi_{n_1,\ldots,n_m}\right| + C_0\left|\varphi_{n_1,\ldots,n_m}\right|\right) \le \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \frac{1}{C_0}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m} \times$$
$$\times\left[\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^5 \ldots n_m^5}\left|\psi_{n_1,\ldots,n_m}^{(5m)}\right| + C_0 \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^5 \ldots n_m^5}\left|\varphi_{n_1,\ldots,n_m}^{(5m)}\right|\right] \le$$
$$\le \left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^m \frac{1}{C_0}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m} \sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{10} \ldots n_m^{10}}} \times$$
$$\times\left[\sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left|\psi_{n_1,\ldots,n_m}^{(5m)}\right|^2} + C_0 \sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \left|\varphi_{n_1,\ldots,n_m}^{(5m)}\right|^2}\right] \le$$
$$\le \gamma_2 \sqrt{\sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \frac{1}{n_1^{10} \ldots n_m^{10}}} \left[\sqrt{\int_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{5m} \psi(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5}\right]^2 dx} + \right.$$
$$\left. + C_0 \sqrt{\int_{\Omega_l^m} \left[\frac{\partial^{5m} \varphi(x)}{\partial x_1^5 \partial x_2^5 \ldots \partial x_m^5}\right]^2 dx}\right] < \infty, \tag{42}$$

где

$$\gamma_2 = \left(\frac{2}{l}\right)^m \frac{1}{C_0}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{5m}, \; C_0 = C_1 \int_0^T \left|\Theta(t)\right| dt.$$

Из оценки (42) следует, что ряд (41) сходится абсолютно и равномерно в области $\{0 < x < l\}$. Подставляя (42) в (27) однозначно определим основную неизвестную функцию $U(t,x,\omega)$:

$$U(t,x,\omega) = \sum_{n_1,\ldots,n_m=1}^{\infty} \vartheta(x)\left[\psi_{n_1,\ldots,n_m} \frac{M_{n_1,\ldots,n_m}(t,\omega)}{\chi_{2,n_1,\ldots,n_m}(\omega)} + \right.$$

$$+\varphi_{n_1,\dots,n_m}\left(F_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega)-M_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega)\frac{\chi_{1,n_1,\dots,n_m}(\omega)}{\chi_{2,n_1,\dots,n_m}(\omega)}\right)\Bigg]. \qquad (43)$$

Для ряда (43) нетрудно доказать справедливость оценок, которые доказаны для ряда (27). При этом имеет место почленное дифференцирование ряда (43) по всем переменным и полученные ряды будут сходиться абсолютно и равномерно.

Теперь покажем, что решение интегро-дифференциального уравнения (1) $U(t,x,\omega)$ устойчиво по функции восстановления $\beta(x)$. Пусть $U_1(t,x,\omega)$ и $U_2(t,x,\omega)-$ два различных решения краевой задачи (1)-(4), соответствующие двум различным значениям функции восстановления $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x)$, соответственно. Положим, что $\left|\beta_{1,n_1,\dots,n_m}-\beta_{2,n_1,\dots,n_m}\right|<\delta_{n_1,\dots,n_m}$, где $0<\delta_{n_1,\dots,n_m}-$ достаточно малые величины, что ряд $\sum\limits_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\left|\delta_{n_1,\dots,n_m}\right|$ сходится. Тогда с учетом это из (27) имеем

$$\left|U_1(t,x,\omega)-U_2(t,x,\omega)\right|\le$$

$$\le\frac{2}{l}\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\left|M_{n_1,\dots,n_m}(t,\,\omega)\right|\cdot\left|\beta_{1,n_1,\dots,n_m}-\beta_{2,n_1,\dots,n_m}\right|<$$

$$<\frac{2}{l}\max_{t\in[0,T]}\left|M_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega)\right|\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\left|\delta_{n_1,\dots,n_m}\right|.$$

Отсюда окончательно получаем утверждения об устойчивости решения интегро-дифференциального уравнения (1) по функции переопределения, при этом положим

$$\varepsilon=\frac{2}{l}\max_{t\in[0,T]}\left|M_{n_1,\dots,n_m}(t,\omega)\right|\sum_{n_1,\dots,n_m=1}^{\infty}\left|\delta_{n_1,\dots,n_m}\right|.$$

Аналогично можно показать, что решение интегро-дифференциального уравнения (1) $U(t,x,\omega)$ устойчиво по заданной функции $\varphi(x)$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия А и Б. При всевозможных* $n_1,\dots,n_m$ *и* $(\omega,\nu)\in\aleph_2$ *решения обратной задачи однозначно определяются из формул* (41) *и* (43). *При этом решение интегро-дифференциального уравнения* (1) $U(t,x,\omega)$ *устойчиво по функции переопределения* $\beta(x)$ *и по заданной функции* $\varphi(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аниконов Ю.Е. Об однозначности решения обратной задачи для квантового кинетического уравнения, Мат. Сборник, Т.181,. № 1, 1990, сс.68-74.
2. Аниконов Ю.Е. Обратные задачи математической физики и биологии, Доклады АН СССР, Т.318, № 6,1991, сс.1350-1354.
3. Баев А.В. Использование преобразования Радона для решения обратной задачи рассеяния в плоской слоистой акустической среде, Ж. вычисл. матем. и матем. Физики, Т.58, № 4, 2018, сс.550-560.
4. Белов Ю.Я. Фроленков И.В. Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений, Доклады РАН, Т.404, № 5, 2005, сс.583-585.
5. Белов Ю.Я. Обратная задача для уравнения Бюргерса, Доклады АН СССР, Т. 323, № 3, 1992, сс.385-388.
6. Гаджиева Н.С., Намазов А. А., Аскеров И.М., Магаррамов И.А. Алгоритм решения задачи идентификации для определения параметров дискретных динамических систем, Proceedings of IAM, Т.5, № 2, 2016, сс.235-244.
7. Гордезиани Д.Г. Самарский А.А. Некоторые задачи термоупругости пластин и оболочек и метод суммарной аппроксимации, Компл. анализ и его приложения, М.: Наука, 1978. сс.173-186.
8. Гулиев Г.Ф., Гасымов Ю.С., Тагиев Х.Т., Гусейнова Т.М. Об обратной задаче нахождения правой части волнового уравнения с нелокальным условием, Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех., Т.49, 2017, сс.16-25. DOI: https://doi.org/10.17223/19988621/49/2.
9. Денисов А.М. Единственность и неединственность решения задачи определения источника в уравнении теплопроводности, Ж. вычисл. матем. и матем. Физики, Т.56, №10, 2016, сс.1754-1759; Comput. Math. Math. Phys., Т.56, № 10, 2016, сс.1737-1742.
10. Исаков В.М. Одна обратная задача для параболического уравнения, Успехи матем. Наук, Т.32, №2, 1982, сс.108-109.
11. Искендеров А.Д. Об одной обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений, Дифференц. Уравнения, Т.10, №5, 1974, сс.890-898.
12. Камынин В.Л. Об однозначной разрешимости обратной задачи для параболических уравнений с условием финального переопределения, Мат. Заметки, Т.73, №2, 2003, сс.217-227.
13. Козлитин И. А. Восстановление входных параметров расчета внешней баллистики тела по результатам траекторных измерений, Мат. Моделирование, Т. 29,№9, 2017, сс.121-134; Math. Models Comput. Simulations, Т.10, №2, 2018, сс.226–236.
14. Саватеев Е.Г. О задаче определения функции источника и коэффициента параболического уравнения, Доклады РАН, Т.344, № 5, 1995, сс.597–598.
15. Юлдашев Т.К. О разрешимости одной краевой задачи для дифференциального уравнения типа Буссинеска, Дифференц. Уравнения, Т.54. №10, 2018, сс.1411-1419; T. K. Yuldashev, Solvability of a boundary value problem for a differential equation of the Boussinesq type, Differential equations, Т.54, №10, 2018, сс.1384-1393.
16. Юлдашев Т.К. Об одной нелокальной краевой задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с вырождением ядра, Дифференц. Уравнения, Т.54, №12, 2018, сс.1687-1694.

17. Benney D.J., Luke J.C. Interactions of permanent waves of finite amplitude, Journ. Math. Phys., V.43, 1964, pp.309-313.

ON A NON-LOCAL INVERSE PROBLEM FOR A BENNEY-LUKE TYPE MULTIDIMENSIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH SPECTRAL PARAMETERS

Yuldashev T.K.

ABSTRACT

The problems of classical solvability and construction of the solution of a nonlocal inverse boundary value problem for a fourth-order Benney-Luke type multidimensional integro-differential equation with a degenerate kernel and spectral parameters are considered. The values of the spectral parameters are calculated, the necessary and sufficient conditions for the existence of the solution of the direct and inverse problems are obtained. It is laid out in the Fourier series the solutions of the problem corresponding to different sets of values of spectral parameters. Proved absolute and uniform convergence of the series, the possibility of their term-by-term differentiation in all variables and the absolute and uniform convergence of the differentiated series.

Keywords: inverse problem, redefinition coefficient, integral conditions, spectral parameters, classical solvability.

REFERENCES

1. Anikonov Iu.E. Ob odnoznachnosti resheniia obratnoi zadachi dlia kvantovogo kineticheskogo uravneniia, Mat. sbornik, 1990, V.181, N.1, p. 68-74. (Anikonov Yu.E. On the uniqueness of the solution of the inverse problem for a quantum kinetic equation, Mat. sbornik, 1990, V.181, N. 1. p. 68-74.) (in Russian)
2. Anikonov Iu.E. Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki i biologii, Doklady AN SSSR, 1991, V. 318, N.6, p.. 1350-1354. (Anikonov Yu.E. Inverse problems of mathematical physics and biology, Doklady AN SSSR,1991, V. 318, N.6, p. 1350-1354.) (in Russian)
3. Baev A.V. Radon Transform for Solving an Inverse Scattering Problem in a Planar Layered Acoustic Medium, Comput. Math. and Math. Phys., 2018, V.58, N. 4, p. 537-547. https://doi.org/10.1134/S0965542518040061
4. Belov Yu.Ya., Frolenkov I.V. Coefficient identification problems for semilinear parabolic equations, Doklady Mathematics, 2005, V.72, N.2, p. 737-739.
5. Belov Iu.Ia. Obratnaia zadacha dlia uravneniia Biurgersa, Doklady AN SSSR, 1992, V.323, N.3, p. 385-388. (Belov Yu.Ya. The inverse problem for the Burgers equation // Doklady AN SSSR, 1992, V.323, N.3, p. 385-388.) (in Russian)
6. Gadzhieva N.S., Namazov A. A., Askerov I.M., Magarramov I.A. Algoritm resheniia zadachi identifikatsii dlia opredeleniia parametrov diskretnykh dinamicheskikh sistem, Proceedings of IAM, 2016, V.5, N.2, p. 235-244. (Gadzhiyeva N.S., Namazov A.A., Askerov I.M., Magarramov I.A. Algorithm for solving the problem of identification to determine the parameters of discrete dynamic systems, Proceedings of IAM, 2016, V.5, N.2, p. 235-244.) (in Russian)

7. Gordeziani D.G., Samarskii A.A. Nekotorye zadachi termouprugosti plastin i obolochek i metod summarnoi approksimatsii, Kompl. analiz i yego prilozheniya. M.: Nauka, 1978. p. 173-186. (Gordeziani DG, Samara A.A. Some problems of thermoelasticity of plates and shells and the method of total approximation, Comp. analysis and its applications. M .: Science, 1978. p. 173-186.) (in Russian)
8. Guliev G. F., Gasymov Iu. S., Tagiev Kh. T., Guseinova T. M. Ob obratnoi zadache nakhozhdeniia pravoi chasti volnovogo uravneniia s nelokal'nym usloviem, Vestn. Tomsk. gos. un-ta. Matem. i mekh., 2017, V.49, p. 16-25. (Guliev G.F., Gasymov Yu.S., Tagiyev Kh.T., Guseinova TM M. On the inverse problem of finding the right side of a wave equation with a nonlocal condition, Vestn. Tomsk. gos. un-ta. Matem. i mekh., 2017, V.49, p. 16-25.) (in Russian) DOI: https://doi.org/10.17223/19988621/49/2
9. Denisov A.M. The uniqueness and non-uniqueness of the solution to the problem of determining the source in the heat equation, Comput. Math. Math. Phys. 2016, V.56, N.10, p. 1737-1742.
10. Isakov V.M. Odna obratnaya zadacha dlya parabolicheskogo uravneniya, Uspekhi matem. nauk, 1982, V.32, N.2, p. 108-109. (Isakov V.M. One inverse problem for a parabolic equation, Uspekhi matem. nauk, 1982, V.32, N.2, p. 108-109.) (in Russian)
11. Iskenderov A.D. Ob odnoi obratnoi zadache dlia kvazilineinykh parabolicheskikh uravnenii, Differents. uravneniya, 1974, V.10, N.5. p. 890-898. (Iskenderov A.D. On an inverse problem for quasilinear parabolic equations, Differents. uravneniya, 1974, V.10, N.5. p. 890-898.) (in Russian)
12. Kamynin V.L. Ob odnoznachnoi razreshimosti obratnoi zadachi dlia parabolicheskikh uravnenii s usloviem final'nogo pereopredeleniia, Mat. zametki, 2003, V. 73, N.2, p. 217-227. (Kamynin V.L. On the unique solvability of the inverse problem for parabolic equations with the condition of final redefinition, Mat. zametki, 2003, V. 73, N.2, p. 217-227.) (in Russian)
13. Kozlitin I.A. Restoration of the input parameters of the calculation of the external ballistics of the body according to the results of trajectory measurements, Math. Models Comput. Simulations, 2017, V.10, N.2, p. 226-236.
14. Savateev E.G. O zadache opredeleniia funktsii istochnika i koeffitsienta parabolicheskogo uravneniia, Doklady RAN, 1995, V.344, N.5, p. 597-598. (Savateev E.G. On the problem of determining the source function and the coefficient of a parabolic equation, Doklady RAN, 1995, V.344, N.5, p. 597-598.) (in Russian)
15. T. K. Yuldashev, Solvability of a boundary value problem for a differential equation of the Boussinesq type // Differential equations. 2018. T. 54. № 10. C. 1384-1393.
16. Iuldashev T.K. Ob odnoi nelokal'noi kraevoi zadache dlia nelineinogo integro-differentsial'nogo uravneniia Fredgol'ma s vyrozhdeniem iadra // Differents. uravneniia. 2018. T. 54. № 12. S. 1687-1694.
17. Benney D. J., Luke J. C. Interactions of permanent waves of finite amplitude // Journ. Math. Phys. 1964. vol. 43. pp. 309-313.